

## VARIANTA 1

	<b>SUBIECTUL I (30p)</b>
5p	1. Să se calculeze $C_3^2 + 3!$ .
5p	2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_5(3x+4) = 2$ .
5p	3. Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ , știind că $x_1$ și $x_2$ sunt soluțiile ecuației $x^2 - x - 2 = 0$ .
5p	4. Se consideră funcția $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = -x^2$ . Să se determine mulțimea valorilor funcției $f$ .
5p	5. Fie punctele $A(2, -1)$ și $B(-1, 3)$ . Să se determine numerele reale $a$ și $b$ astfel încât $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$ .
5p	6. Se consideră triunghiul $ABC$ cu $AB = 4$ , $AC = \sqrt{7}$ și $BC = \sqrt{3}$ . Să se calculeze măsura unghiului $B$ .

---

**SUBIECTUL II (30p)**

1.	Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ , unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației $x^3 - 3x + 2 = 0$ .
5p	a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$ .
5p	b) Să se arate că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$ .
5p	c) Să se calculeze valoarea determinantului $d$ .
2.	Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$ .
5p	a) Să se verifice că $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ .
5p	b) Să se calculeze $x \circ (-4)$ , unde $x$ este număr real.
5p	c) Știind că operația „ $\circ$ ” este asociativă, să se calculeze $(-2009) \circ (-2008) \circ \dots \circ 2008 \circ 2009$ .

**SUBIECTUL III (30p)**

1.	Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ .
5p	a) Să se calculeze derivata funcției $f$ .
5p	b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $f$ .
5p	c) Să se demonstreze că $f(x) \leq -4$ pentru orice $x < -1$ .
2.	Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \begin{cases} x^2 + e^x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$ .
5p	a) Să se arate că funcția $f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$ .
5p	b) Să se calculeze $\int_{-1}^0 x f(x) dx$ .
5p	c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ , $g(x) = f(x)$ .

## VARIANTA 2

---

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 3$ . Să se determine  $f(-4) \cdot f(-3) \cdots f(3) \cdot f(4)$ .
- 5p** 2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_2(x+2) + \log_2 x = 3$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi inecuația  $x^2 - 5x + 5 \leq 1$ .
- 5p** 4. Să se demonstreze că pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  numerele  $3^x - 1$ ,  $3^{x+1}$  și  $5 \cdot 3^x + 1$  sunt termeni consecutivi într-o progresie aritmetică.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(4, -8)$  și  $B(6, 3)$ . Să se determine coordonatele vectorului  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ .
- 5p** 6. Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$  știind că  $AC = 2$ ,  $m(\angle BAC) = 30^\circ$  și  $AB = 4$ .

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră determinantul  $d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Pentru  $a = 2$ ,  $b = 1$  și  $c = -1$ , să se calculeze determinantul  $d$ .
- 5p** b) Să se verifice că  $d = \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$ , oricare ar fi  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\begin{vmatrix} 2^x & 3^x & 5^x \\ 5^x & 2^x & 3^x \\ 3^x & 5^x & 2^x \end{vmatrix} = 0$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația  $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$ .
- 5p** a) Să se arate că  $x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x \circ x = 11$ .
- 5p** c) Știind că operația  $\circ$  este asociativă, să se calculeze  $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \dots \circ \sqrt{2009}$ .

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - e^{-x}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- 5p** b) Să se arate că funcția  $f$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $S = g(0) + g(1) + \dots + g(2009)$ , unde  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f'(x) - f''(x)$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^x$  și  $F(x) = (x-1)e^x$ .
- 5p** a) Să se verifice că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p** b) Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele  $x=0$  și  $x=1$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $\int_1^x \frac{f(t)f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)} dt = \frac{x+1}{x} - 2$ , pentru orice  $x > 1$ .

### VARIANTA 3

---

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Să se determine al zecelea termen al sirului 1, 7, 13, 19, ... .
- 5p** 2. Se consideră toate numerele naturale de trei cifre scrise cu elemente din mulțimea  $\{1, 2\}$ . Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un astfel de număr, acesta să fie divizibil cu 3.
- 5p** 3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\sqrt{2+x} = x$ .
- 5p** 4. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 1$ . Să se calculeze  $f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1)$ .
- 5p** 5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele  $A(2, -1)$  și  $B(1, -2)$ .
- 5p** 6. Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = AC = \sqrt{2}$ ,  $m(\angle A) = 30^\circ$ .

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră determinantul  $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ , unde  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  sunt soluțiile ecuației  $x^3 - 2x = 0$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $x_1 + x_2 + x_3$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ .
- 5p** c) Să se calculeze determinantul  $d$ .
2. Se consideră polinoamele cu coeficienți reali  $f = X^4 + aX^3 - 28X^2 + bX + 96$ ,  $g = X^2 + 2X - 24$  și  $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4)$ .
- 5p** a) Să se scrie forma algebrică a polinomului  $h$ .
- 5p** b) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât polinoamele  $f$  și  $h$  să fie egale.
- 5p** c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $16^x + 2 \cdot 8^x - 28 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 96 = 0$ .

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$ , pentru orice  $x \in (0; +\infty)$ .
- 5p** b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $3^{\sqrt{5}} \leq 5^{\sqrt{3}}$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} e \cdot e^x, & x \leq -1 \\ 2 + x, & x > -1 \end{cases}$ .
- 5p** a) Să se arate că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x)$ ,  $x \in [0, 2]$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\int_{-2}^0 \frac{xf(x)}{e} dx$ .

## VARIANTA 4

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine soluțiile întregi ale inecuației  $(x-1)^2 + x - 7 < 0$ .
- 5p** 2. Să se calculeze suma primilor 5 termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1 = 1$  și  $a_2 = 3$ .
- 5p** 3. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = mx^2 - 8x - 3$ , unde  $m$  este un număr real nenul. Să se determine  $m$  știind că valoarea maximă a funcției  $f$  este egală cu 5.
- 5p** 4. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_2(x+2) - \log_2(x-5) = 3$ .
- 5p** 5. Să se determine numărul real  $a$  știind că vectorii  $\vec{u} = 2\vec{i} + a\vec{j}$  și  $\vec{v} = 3\vec{i} + (a-2)\vec{j}$  sunt coliniari.
- 5p** 6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = 3$  și  $m(\angle C) = 30^\circ$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea  $M_2(\mathbb{R})$  se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  și  $X(a) = I_2 + aA$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $A^3$ , unde  $A^3 = A \cdot A \cdot A$ .
- 5p** b) Să se verifice dacă  $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab)$ , oricare ar fi numerele  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se calculeze suma  $X(1) + X(2) + X(3) + \dots + X(2009)$ .
2. Se consideră inelul  $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ , unde  $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$ .
- 5p** a) Să se rezolve în  $\mathbb{Z}_6$  ecuația  $\hat{2}x + \hat{5} = \hat{1}$ .
- 5p** b) Să se calculeze determinantul  $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}$  în  $\mathbb{Z}_6$ .
- 5p** c) Să se rezolve în  $\mathbb{Z}_6$  sistemul de ecuații  $\begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{4} \\ x + \hat{2}y = \hat{5} \end{cases}$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + e^{-x}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se arate că  $f$  este descrescătoare pe  $(-\infty, 0]$  și crescătoare pe  $[0, +\infty)$ .
- 5p** c) Să se determine ecuația asymptotei oblice către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (x+1)^3 - 3x^2 - 1$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\int_0^1 g(x)dx$ .
- 5p** b) Să se determine numărul real  $a > 1$  astfel încât  $\int_1^a (g(x) - x^3) \cdot e^x dx = 6e^a$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\int_0^1 (3x^2 + 3) \cdot g^{2009}(x)dx$ .

## VARIANTA 5

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine numărul elementelor mulțimii  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x+1| \leq 2\}$ .
- 5p** 2. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $\{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[3]{30}\}$ , acesta să fie număr rațional.
- 5p** 3. Fie funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 3$  și  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 2x - 1$ . Să se determine soluția reală a ecuației  $2f(x) + 3g(x) = -5$ .
- 5p** 4. După o reducere cu 20 %, prețul unui produs este 320 de lei. Să se determine prețul produsului înainte de reducere.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se consideră vectorii  $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$  și  $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{j}$ . Să se determine coordonatele vectorului  $5\vec{u} + 3\vec{v}$ .
- 5p** 6. Fie triunghiul dreptunghic  $ABC$  și  $D$  mijlocul ipotenuzei  $BC$ . Să se calculeze lungimea laturii  $AB$ , știind că  $AC = 6$  și  $AD = 5$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Se notează  $A^2 = A \cdot A$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Să se determine  $x$  real, știind că  $\det(A) = 0$ .
- 5p** b) Să se verifice egalitatea  $A^2 = (2x-6)A - (x^2 - 6x + 8) \cdot I_2$ .
- 5p** c) Să se determine  $x \in \mathbb{R}$  pentru care  $A^2 = 2A$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție  $x \circ y = xy - 2(x+y) + 6$ .
- 5p** a) Să se arate că  $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că  $x \circ 2 = 2$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Știind că legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei  $E = (-2009) \circ (-2008) \circ \dots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \dots \circ 2009$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{2009} - 2009(x-1) - 1$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f(0) + f'(0)$ .
- 5p** b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(0;1)$ .
- 5p** c) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $[0; +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + e^{-x}$ .
- 5p** a) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .
- 5p** b) Folosind faptul că  $x^2 + e^{-x^2} \geq 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , să se demonstreze că  $\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \frac{2}{3}$ .
- 5p** c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) + f(-x)$ .

## VARIANTA 6

	<b>SUBIECTUL I (30p)</b>
5p	1. Să se calculeze $a^2 + b^2$ , știind că numerele $a$ și $b$ au suma egală cu 4 și produsul egal cu 3.
5p	2. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x^2 - x + 1$ și $g(x) = x + 4$ . Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f$ și $g$ .
5p	3. Să se determine valorile reale pozitive ale numărului $x$ , știind că $\lg \sqrt{x}, \frac{3}{2}$ și $\lg x$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
5p	4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots, \sqrt{10}\}$ , acesta să fie rațional.
5p	5. Să se determine numărul real $a$ , știind că dreptele $2x - y + 3 = 0$ și $ax + 2y + 5 = 0$ sunt paralele.
5p	6. Se consideră triunghiul $ABC$ cu $AB = 1$ , $AC = 2$ și $BC = \sqrt{5}$ . Să se calculeze $\cos B$ .
	<b>SUBIECTUL II (30p)</b>
	1. În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n, 2^n)$ , $n \in \mathbb{N}$ .
5p	a) Să se demonstreze că punctele $O, A_1, A_2$ sunt coliniare.
5p	b) Să se determine numărul de drepte care trec prin cel puțin două dintre punctele $O, A_0, A_1, A_2$ .
5p	c) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele $A_n, A_{n+1}, A_{n+2}$ , $n \in \mathbb{N}$ .
	2. Se consideră mulțimea $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ , unde matricea $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $x \in \mathbb{Z}$ .
5p	a) Să se verifice că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$ , unde $x, y \in \mathbb{Z}$ .
5p	b) Știind că mulțimea $G$ împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează o structură de grup, să se determine elementul neutru al grupului $(G, \cdot)$ .
5p	c) Să se arate că funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$ , $f(x) = A_x$ este morfism între grupurile $(\mathbb{Z}, +)$ și $(G, \cdot)$ .
	<b>SUBIECTUL III (30p)</b>
	1. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$ .
5p	a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
5p	b) Să se verifice că $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$ , oricare ar fi $x \geq 0$ .
5p	c) Să se demonstreze că $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2$ , pentru orice $x \in [0, +\infty)$ .
	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x^2 + e^x + 1$ .
5p	a) Să se arate că orice primitivă a funcției $f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$ .
5p	b) Să se calculeze $\int_0^1 x f(x) dx$ .
5p	c) Să se demonstreze că $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e + \frac{1}{3}$ .

## VARIANTA 7

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze  $x_1 + x_2 + x_1 x_2$ , știind că  $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile ecuației  $x^2 - 2x - 2 = 0$ .
- 5p** 2. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3 - 4x$ . Să se determine soluțiile reale ale inecuației  $f(x) - 1 \geq 4x$ .
- 5p** 3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $3^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$ .
- 5p** 4. Să se calculeze  $\log_3 27 - \log_2 8$ .
- 5p** 5. Se consideră punctele  $A(1, a)$ ,  $B(2, -1)$ ,  $C(3, 2)$  și  $D(1, -2)$ . Să se determine numărul real  $a$ , știind că dreptele  $AB$  și  $CD$  sunt paralele.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 5$ ,  $AC = 6$  și  $BC = 7$ . Să se calculeze  $\cos A$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Să se calculeze matricea  $B^2$ , unde  $B^2 = B \cdot B$ .
- 5p** b) Să se verifice că  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ .
- 5p** c) Să se arate că  $C^4 = 6^4 \cdot I_2$ , unde  $C = B^2 + A^{-1}$  și  $C^4 = C \cdot C \cdot C \cdot C$ .
2. Fie polinoamele  $f = X^3 + aX^2 + X + \hat{1}$  și  $g = X + \hat{3}$  din inelul  $\mathbb{Z}_5[X]$ .
- 5p** a) Să se determine  $a \in \mathbb{Z}_5$  astfel încât polinomul  $f$  să fie divizibil cu polinomul  $g$ .
- 5p** b) Pentru  $a = \hat{1}$  să se arate că  $f = (X + \hat{1})(X^2 + \hat{1})$ .
- 5p** c) Pentru  $a = \hat{1}$  să se rezolve în inelul  $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$  ecuația  $f(x) = \hat{0}$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x + x^2$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că funcția  $f$  nu are asimptotă către  $+\infty$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .
2. Se consideră funcția  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x(1 + \ln x)}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\int_1^e f'(x) dx$ .
- 5p** b) Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este crescătoare pe  $[1, +\infty)$ .
- 5p** c) Să se determine numărul real  $a \in (1, e^2)$  astfel încât aria suprafeței plane, determinată de graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$ , dreptele de ecuații  $x = a$  și  $x = e^2$ , să fie egală cu  $\ln \frac{3}{2}$ .

## VARIANTA 8

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine suma elementelor mulțimii  $A = \{1, 3, 5, \dots, 13\}$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 1$ . Să se determine punctul care aparține graficului funcției  $f$  și are abscisa egală cu ordonata.
- 5p** 3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $2^x + 2^{x+3} = 36$ .
- 5p** 4. Să se calculeze  $A_4^4 + C_4^4$ .
- 5p** 5. Să se determine ecuația dreptei care conține punctul  $A(1, 1)$  și este paralelă cu dreapta  $4x + 2y + 5 = 0$ .
- 5p** 6. Să se calculeze  $\sin^2 130^\circ + \cos^2 50^\circ$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  și  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Definim matricele  $A = X \cdot Y^t$  și  $B(a) = aA + I_3$ , unde  $a \in \mathbb{R}$  și  $Y^t$  este transpusa matricei  $Y$ .
- 5p** a) Să se arate că matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$ .
- 5p** b) Să se calculeze determinantul matricei  $A$ .
- 5p** c) Să se arate că matricea  $B(a)$  este inversabilă, oricare ar fi  $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\}$ .
2. Se consideră polinoamele  $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$ ,  $f = (\hat{3}a + \hat{3}b)X^2 + \hat{2}X + \hat{2}a + \hat{3}b$  și  $g = \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{3}a + \hat{2}b$ .
- 5p** a) Să se determine  $a, b \in \mathbb{Z}_5$  astfel încât cele două polinoame să fie egale.
- 5p** b) Pentru  $a = b = \hat{2}$  să se calculeze în  $\mathbb{Z}_5$  suma  $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) + f(\hat{3}) + f(\hat{4})$ .
- 5p** c) Pentru  $a = b = \hat{2}$  să se rezolve în  $\mathbb{Z}_5$  ecuația  $f(x) = \hat{0}$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \setminus \{e\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .
- 5p** b) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{2}{x(1 - \ln x)^2}$ , oricare ar fi  $x \in (0; +\infty) \setminus \{e\}$ .
- 5p** c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$  și  $g(x) = \frac{1}{x}$ .
- 5p** a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției  $f + g$ .
- 5p** b) Să se arate că  $\int_1^2 (f^2(x) + g^2(x)) dx = \frac{e^4 - e^2 + 1}{2}$ .
- 5p** c) Folosind eventual faptul că  $2ab \leq a^2 + b^2$ , pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ , să se demonstreze că  $\int_1^2 e^x \cdot \frac{1}{x} dx \leq \frac{e^4 - e^2 + 1}{4}$ .

## VARIANTA 9

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se verifice că  $\log_3 9 - \log_2 8 = \log_4 \frac{1}{4}$ .
- 5p** 2. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât ecuația  $x^2 + 2mx + 4m = 0$  să aibă soluții reale.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt[3]{x^2 - x - 3} = -1$ .
- 5p** 4. O sumă de 1000 de lei a fost depusă la o bancă și după un an s-a obținut o dobândă de 80 de lei. Să se calculeze rata dobânzii.
- 5p** 5. Să se determine coordonatele punctului  $B$ , știind că  $A(3,4)$  și  $\overline{AB} = \vec{i} + \vec{j}$ .
- 5p** 6. Să se calculeze aria unui paralelogram  $ABCD$ , știind că  $AB = 3$ ,  $AD = \sqrt{3}$  și  $m(\angle BAD) = 120^\circ$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea  $M_2(\mathbb{Z})$  se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Să se determine numerele intregi  $a, b, c, d$  astfel încât  $A + 2I_2 = O_2$ .
- 5p** b) Să se calculeze determinantul matricei  $B = A - A^t$ .
- 5p** c) Să se arate că, dacă  $A + A^t = 2I_2$ , atunci determinantul matricei  $A - A^t$  este un număr divizibil cu 4.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compozitie  $x \circ y = (x-4)(y-4) + 4$ .
- 5p** a) Să se determine elementul neutru al legii de compozitie.
- 5p** b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x \circ x \circ x = x$ .
- 5p** c) Să se determine două numere  $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  astfel încât  $a \circ b \in \mathbb{N}$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Pentru  $a = 1, b = c = 0$ , să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 5p** b) Să se verifice că  $f'(0) - f(0) = b$ .
- 5p** c) Să se determine  $a, b, c \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  și  $f''(0) = 4$ .
2. Se consideră integralele  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n + 1}{x+1} dx$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $I_1$ .
- 5p** b) Folosind, eventual, faptul că  $x^2 \leq x$  pentru orice  $x \in [0,1]$ , să se demonstreze că  $I_2 \leq I_1$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1} + 2\ln 2$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## VARIANTA 10

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine al patrulea termen al unei progresii geometrice, știind că rația este egală cu  $\frac{1}{3}$  și primul termen este 27.
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 1$ . Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $f^2(x) + 2f(x) - 3 = 0$ .
- 5p** 3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$ .
- 5p** 4. Să se compare numerele  $a = C_4^1 + C_4^3$  și  $b = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$ .
- 5p** 5. Se consideră vectorii  $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$  și  $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ . Să se determine coordonatele vectorului  $\vec{w} = 2\vec{v} - 3\vec{u}$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$ , având aria egală cu 15. Să se calculeze  $\sin A$ , știind că  $AB = 6$  și  $AC = 10$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ . Se notează  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{de\ n\ ori}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p** a) Să se calculeze determinantul matricei  $A$ .
- 5p** b) Să se arate că  $A^2 + A^3 = O_2$ .
- 5p** c) Să se calculeze suma  $A + 2 \cdot A^2 + \dots + 10 \cdot A^{10}$ .
2. Se consideră polinoamele  $f, g \in \mathbb{R}[X]$ ,  $f = (X-1)^{10} + (X-2)^{10}$  și  $g = X^2 - 3X + 2$ .
- 5p** a) Să se descompună polinomul  $g$  în produs de factori ireductibili în  $\mathbb{R}[X]$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că polinomul  $f$  nu este divizibil cu polinomul  $g$ .
- 5p** c) Să se determine restul împărțirii polinomului  $f$  la polinomul  $g$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 1 \\ -x^2 + x, & x < 1 \end{cases}$ .
- 5p** a) Să se studieze continuitatea funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 1$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $f'(0) + f'(2)$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că funcția  $f$  este concavă pe  $(-\infty; 1)$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$  și  $g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$ .
- 5p** a) Să se verifice că funcția  $g$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x)g(x) dx$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $\int_0^1 f'(x)g'(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ .

## VARIANTA 11

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze  $C_5^4 + A_5^4$ .
- 5p** 2. Să se calculeze suma  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4}$ .
- 5p** 3. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ . Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$  știind că  $3f(x) + 2 = 3x + 5$ , pentru oricare  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** 4. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_3(x^2 - 2x) = \log_3(2x - 3)$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1, 2)$ ,  $B(-1, 1)$ ,  $C(3, 5)$  și  $D(5, a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Să se determine  $a$ , știind că  $AB \parallel CD$ .
- 5p** 6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$  știind că  $BC = 8$  și  $m(\angle A) = 45^\circ$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele  $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$  și  $V = \begin{pmatrix} v & 9 \\ 1 & v \end{pmatrix}$  cu  $v, x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Să se arate că dacă  $X \cdot V = U$ , atunci  $x \cdot (v^2 - 9) = 0$ .
- 5p** b) Să se determine valorile reale ale numărului  $v$  pentru care determinantul matricei  $V$  este nenul.
- 5p** c) Să se determine trei soluții distincte ale sistemului de ecuații  $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 9x + 3y = 0 \end{cases}$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție  $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1}$ .
- 5p** a) Să se demonstreze că  $x \circ (-x) = -1$ , oricare ar fi  $x$  real.
- 5p** b) Să se arate că legea de compoziție “ $\circ$ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se calculeze  $(-4) \circ (-3) \circ \dots \circ 3 \circ 4$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $f'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{(x+1)^3}$ , oricare ar fi  $x \in (0, \infty)$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că funcția  $f$  este descrescătoare pe intervalul  $(0, +\infty)$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 f'(x)$ .
2. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\int_1^e (f(x) - \frac{\ln x}{x}) dx$ .
- 5p** b) Să se verifice că  $\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2}{2}$ .
- 5p** c) Să se arate că sirul care are termenul general  $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - x) dx$ ,  $n \geq 1$  este o progresie aritmetică cu rația 1.

## VARIANTA 12

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 25$ . Să se calculeze  $f(-5) \cdot f(-4) \cdot \dots \cdot f(0) \cdot \dots \cdot f(4) \cdot f(5)$ .
- 5p** 2. Să se rezolve ecuația  $C_n^2 = 28$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .
- 5p** 3. Știind că  $\log_3 2 = a$ , să se verifice dacă  $\log_3 8 + \log_3 100 - \log_3 25 = 5a$ .
- 5p** 4. Să se determine soluțiile reale ale inecuației  $\frac{2x+3}{x^2+x+1} \geq 1$ .
- 5p** 5. Să se determine ecuația dreptei care conține punctele  $A(2,3)$  și  $B(-3,-2)$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$  de arie egală cu 6, cu  $AB = 3$  și  $BC = 8$ . Să se calculeze  $\sin B$ .

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Se notează cu  $X \cdot X = X^2$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $A = I_3 + B$ .
- 5p** b) Să se calculeze suma  $A^2 + B^2$ .
- 5p** c) Să se calculeze inversa matricei  $A^2$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy + 7(x+y) + 42$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\sqrt{2} \circ (-\sqrt{2})$ .
- 5p** b) Să se verifice că  $x \circ y = (x+7)(y+7) - 7$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Știind că legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă, să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x \circ x \circ x = x$ .

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 2\ln x$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că funcția  $f$  este convexă pe intervalul  $(0, +\infty)$ .
- 5p** c) Să se arate că  $f(x) \geq \ln \frac{e^2}{4}$ , oricare ar fi  $x \in (0, +\infty)$ .
2. Se consideră funcțiile  $f_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_m(x) = m^2 x^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\int f_1(x) dx$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\int_0^1 e^x f_0(x) dx$ .
- 5p** c) Să se determine  $m \in \mathbb{R}^*$  astfel încât  $\int_0^1 f_m(x) dx = \frac{3}{2}$ .

## VARIANTA 13

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine numărul tuturor submulțimilor de 2 elemente care se pot forma cu elemente din mulțimea  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
- 5p** 2. Se consideră funcțiile  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$  și  $g(x) = x - 1$ . Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $f(x) = -g(x)$ .
- 5p** 3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_3(x^2 - 4x + 4) = 2$ .
- 5p** 4. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  știind că parabola asociată funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - mx + m - 1$  este tangentă axei  $Ox$ .
- 5p** 5. Să se calculeze aria triunghiului echilateral  $ABC$  știind că  $A(-1, 1)$  și  $B(3, -2)$ .
- 5p** 6. Să se calculeze  $\cos x$ , știind că  $\sin x = \frac{4}{5}$  și  $x$  este măsura unui unghi ascuțit.

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul  $D(a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Să se calculeze determinantul  $D(9)$ .
- 5p** b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $D(a) = 0$ .
- 5p** c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $D(3^x) = 0$ .
2. Se consideră mulțimea  $M = [k; +\infty) \subset \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  și operația  $x * y = xy - k(x + y) + k^2 + k$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Să se determine  $k \in \mathbb{R}$  astfel încât  $2 * 3 = 2$ .
- 5p** b) Pentru  $k = 2$  să se rezolve în  $M$  ecuația  $x * x = 6$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că pentru orice  $x, y \in M$ , rezultă că  $x * y \in M$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .
- 5p** b) Să se determine ecuația asimptotei către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $f(x) \geq 1$ , pentru orice  $x > -1$ .
2. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$  se consideră  $I_n = \int_{e^{-n}}^{e^n} \frac{\ln^n x}{x} dx$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $I_0 = 1$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $I_1$ .
- 5p** c) Folosind, eventual, faptul că  $1 \leq \ln x \leq 2$  oricare ar fi  $x \in [e, e^2]$ , să se demonstreze că  $1 \leq \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \leq 2^n$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

## VARIANTA 14

	<b>SUBIECTUL I (30p)</b>
5p	1. Să se demonstreze că dacă $a \in \mathbb{R}^*$ , atunci ecuația $ax^2 - (2a+1)x + a+1 = 0$ are două soluții reale distințe.
5p	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x^2 - 11x + 30$ . Să se calculeze $f(0) \cdot f(1) \cdots f(6)$ .
5p	3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+3} - 2^x = 28$ .
5p	4. Să se efectueze $A_6^2 - 2C_6^4$ .
5p	5. Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(2,3)$ și $B(5, -1)$ .
5p	6. Să se calculeze perimetrul triunghiului $ABC$ știind că $AB = 2$ , $BC = 4$ și $m(\angle B) = 60^\circ$ .
	<b>SUBIECTUL II (30p)</b>
5p	1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Se notează $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{de\ n\ ori}$ .
5p	a) Să se calculeze $A^2 + A$ .
5p	b) Știind că $A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , pentru oricare $n \in \mathbb{N}$ , $n \geq 2$ , să se rezolve ecuația $\det(A^n) = 2 \cdot 5^n - 125$ .
5p	c) Să se determine transpusa matricei $B = A + A^2 + \dots + A^{2009}$ .
5p	2. Se consideră polinomul $f = X^4 + mX^2 + n$ , unde $m, n \in \mathbb{R}$ . Rădăcinile polinomului sunt $x_1, x_2, x_3, x_4$ .
5p	a) Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ , știind că polinomul $f$ admite rădăcinile $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$ .
5p	b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului să verifice relația $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$ .
5p	c) Pentru $m = 1$ și $n = 1$ să se descompună polinomul $f$ în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$ .
	<b>SUBIECTUL III (30p)</b>
5p	1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .
5p	a) Să se calculeze $f'(e)$ .
5p	b) Să se determine ecuația asymptotei orizontale spre $+\infty$ a graficului funcției $f$ .
5p	c) Să se demonstreze că $x^e \leq e^x$ , pentru orice $x > 0$ .
5p	2. Se consideră funcția $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ .
5p	a) Să se calculeze $\int_0^4 f^2(x) dx$ .
5p	b) Să se verifice că $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{f(x)} dx = 0$ .
5p	c) Să se demonstreze că $0 \leq \int_0^m f(x) dx \leq 8$ , oricare ar fi $m \in [0, 2]$ .

## VARIANTA 15

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii  $\{1, 2, 3, 4\}$ .
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $125^x = \frac{1}{5}$ .
- 5p** 3. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 5x + m + 6$ . Să se determine valorile reale ale lui  $m$  știind că  $f(x) \geq 0$ , pentru oricare  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** 4. Să se determine numărul real  $x$ , știind că  $2^x - 1$ ,  $4^x$  și  $2^{x+1} + 3$  sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p** 5. Să se calculeze  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$ , știind că  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt vârfurile unui triunghi.
- 5p** 6. Să se calculeze perimetrul triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = 5$ ,  $AC = 4$  și  $m(\angle A) = 60^\circ$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  în  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $AB = BA$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $A^2 + B^2$ , unde  $A^2 = A \cdot A$  și  $B^2 = B \cdot B$ .
- 5p** c) Să se arate că  $C^4 = 5^4 \cdot I_2$ , unde  $C = A + B$  și  $C^4 = C \cdot C \cdot C \cdot C$ .
2. Se consideră polinoamele cu coeficienți raționali  $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6$  și  $g = X^3 + X - 2$ .
- 5p** a) Să se determine  $a, b \in \mathbb{Q}$  astfel încât polinomul  $f$  să fie divizibil cu polinomul  $g$ .
- 5p** b) Pentru  $a = -3$  și  $b = 1$  să se descompună polinomul  $f$  în produs de factori ireductibili în  $\mathbb{Q}[X]$ .
- 5p** c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^x - 5 + 6 \cdot 3^{-x} = 0$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_0(x) = e^{-x} - 1$  și  $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .
- 5p** a) Să determine  $f_1(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către  $+\infty$  a graficului funcției  $f_0$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x) + x - 1}{x^2}$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x \sqrt{x^2 + 1}$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = e - 1$ .
- 5p** b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = xe^{-x} f(x)$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 0$  și  $x = 1$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) dx$ .

## VARIANTA 16

---

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Să se calculeze  $C_8^3 - C_8^5$ .
- 5p** 2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_2(x+5) = 3$ .
- 5p** 3. Să se determine o ecuație de gradul al II-lea ale cărei soluții  $x_1$  și  $x_2$  verifică relațiile  $x_1 + x_2 = 1$  și  $x_1 x_2 = -2$ .
- 5p** 4. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ . Să se calculeze  $f(f(0)) - f(2)$ .
- 5p** 5. Să se determine coordonatele punctului  $C$ , simetricul punctului  $A(5,4)$  față de punctul  $B(-2,1)$ .
- 5p** 6. Triunghiul  $ABC$  are  $AB = 3$ ,  $AC = 4$  și  $BC = 5$ . Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful  $A$ .

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră sistemul  $\begin{cases} mx + y + z = m^2 - 3 \\ 5x - 2y + z = -2 \\ (m+1)x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$ , unde  $m$  este un parametru real.
- 5p** a) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$ , știind că  $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ m+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12$ .
- 5p** b) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât sistemul să admită soluția  $(1,2,-3)$ .
- 5p** c) Pentru  $m = -1$  să se rezolve sistemul de ecuații.
2. Se consideră polinomul  $f = X^3 - 9X^2 - X + 9$  care are rădăcinile  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  la  $X^2 - 1$ .
- 5p** b) Să se verifice că  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 18$ .
- 5p** c) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația  $f(3^x) = 0$ .

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x^2 + x + a, & x \geq 0 \end{cases}$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f$  să fie continuă în punctul  $x_0 = 0$ .
- 5p** b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A\left(-1; \frac{1}{e} - 1\right)$ .
- 5p** c) Să se arate că funcția  $f'$  este crescătoare pe  $(0; +\infty)$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}$ .
2. Se consideră  $I_n = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{x^n}{x^2 - 1} dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $I_1$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

## VARIANTA 17

---

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze  $2\log_3 4 - 4\log_3 2$ .
- 5p** 2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $2^{x-1} + 2^x = 12$ .
- 5p** 3. Să se determine numărul natural  $n$ ,  $n \geq 1$  știind că  $A_n^1 + C_n^1 = 10$ .
- 5p** 4. Fie funcția  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -4x + 3$ . Să se determine mulțimea valorilor funcției  $f$ .
- 5p** 5. Se consideră triunghiul echilateral  $ABC$  înscris într-un cerc de centru  $O$ . Să se arate că  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{O}$ .
- 5p** 6. Să se calculeze  $\sin 135^\circ$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $O(0,0)$  și  $A_n(n, 2n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- 5p** a) Să se determine ecuația dreptei  $A_1A_2$ .
- 5p** b) Să se calculeze aria triunghiului  $OA_1A_2$ .
- 5p** c) Să se arate că toate punctele  $A_n(n, 2n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  sunt coliniare.
2. Se consideră mulțimea  $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ .
- 5p** a) Să se verifice dacă  $A(a) \cdot A(b) = A(2ab)$ , oricare ar fi numerele reale  $a$  și  $b$ .
- 5p** b) Să se arate că  $A\left(\frac{1}{2}\right)$  este element neutru față de operația de înmulțire a matricelor pe  $M$ .
- 5p** c) Să se determine simetricul elementului  $A(1) \in M$  în raport cu operația de înmulțire a matricelor pe mulțimea  $M$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că funcția  $f$  este descrescătoare pe  $(0, 2]$ .
- 5p** c) Să se arate că  $2e^{\sqrt{3}} \leq 3e^{\sqrt{2}}$ .
2. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x - x$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\int_1^2 (x - f(x) + \ln x)^2 dx$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că orice primitivă  $F$  a funcției  $f$  este concavă pe intervalul  $(1, +\infty)$ .
- 5p** c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $h : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = f(x) + x$ , axa  $Ox$  și dreptele  $x=1$  și  $x=e$ .

## VARIANTA 18

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze  $\log_2 3 + \log_2 \frac{1}{3}$ .
- 5p** 2. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii  $\{0,1,2,3,4,5\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $n! < 50$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^x - 14 \cdot 2^{-x} = -5$ .
- 5p** 4. Să se demonstreze că pentru orice număr real  $a$ , ecuația de gradul al doilea  $x^2 - (2 \sin a)x + 1 - \cos^2 a = 0$  admite soluții reale egale.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră vectorii  $\overrightarrow{OA}(2, -3)$  și  $\overrightarrow{OB}(1, -2)$ . Să se determine numerele reale  $\alpha$  și  $\beta$  pentru care vectorul  $3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB}$  are coordonatele  $(\alpha, \beta)$ .
- 5p** 6. Raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$  este  $\frac{3}{2}$ , iar  $BC = 3$ . Să se calculeze  $\sin A$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea  $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 = 1 \right\}$ .
- 5p** a) Să se verifice dacă matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și respectiv  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  aparțin mulțimii  $G$ .
- 5p** b) Să se determine matricea  $B \in M_2(\mathbb{Z})$  astfel încât  $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} = aI_2 + bB$ , oricare  $a, b \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din  $G$  este tot o matrice din  $G$ .
2. Se consideră polinomul cu coeficienți raționali  $f = X^3 + aX^2 - 5X + 14$  și suma  $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , unde  $x_1, x_2, x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .
- 5p** a) Să se determine numărul rațional  $a$  astfel încât polinomul  $f$  să admită rădăcina  $x_1 = -2$ .
- 5p** b) Pentru  $a = -4$  să se rezolve ecuația  $f(x) = 0$ .
- 5p** c) Pentru  $a = -4$  să se demonstreze egalitatea  $S_3 + 42 = 4S_2 + 5S_1$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x+1)^2 + (x-1)^2$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $f'(x) = 4x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ .
- 5p** c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x + \ln x$ .
- 5p** a) Știind că  $g: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) - \ln x$ , să se verifice că  $\int g(x) dx = g(x) + C$ ,  $x > 0$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\int_1^e f(x) dx$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $\int_1^e xf(x^2) dx = \frac{e^{e^2} + e^2 - e + 1}{2}$ .

## VARIANTA 19

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze  $\log_6 24 - \log_6 4$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ . Să se calculeze  $f(0) \cdot f(1) \cdot \dots \cdot f(2009)$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x-5} = 2$ .
- 5p** 4. Să se determine numărul natural  $n$ ,  $n \geq 5$ , știind că  $\frac{(n-3)!}{(n-5)!} = 6$ .
- 5p** 5. Să se determine numerele reale  $a$ , știind că lungimea segmentului determinat de punctele  $A(-1, 2)$  și  $B(4-a, 4+a)$  este egală cu 5.
- 5p** 6. Să se calculeze  $\cos^2 45^\circ + \sin^2 135^\circ$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A_n \left( \log_2 \left( \frac{1}{2} \right)^n, \log_3 9^n \right)$  și  $B_n(-n, 2n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p** a) Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele  $B_1$  și  $B_2$ .
- 5p** b) Să se arate că  $A_n = B_n$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , punctul  $A_n$  aparține dreptei  $A_1A_2$ .
2. În mulțimea  $\mathbb{R}[X]$  se consideră polinoamele  $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$  și  $g = X^2 - X - 1$ .
- 5p** a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  la polinomul  $g$ .
- 5p** b) Să se arate că dacă  $y$  este rădăcină a polinomului  $g$ , atunci  $y^3 = 2y + 1$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că dacă  $y$  este rădăcină a polinomului  $g$ , atunci  $f(y)$  nu este număr rațional.

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $0 < f(x) \leq \frac{1}{2e}$ , pentru orice  $x \in [\sqrt{e}, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\int_1^e \left( f(x) + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$ .
- 5p** b) Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este crescătoare pe  $(0, +\infty)$ .
- 5p** c) Să se verifice că  $\int_1^2 f'(x)f(x)dx = -\frac{22}{81}$ .

## VARIANTA 20

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze  $\log_3 6 + \log_3 2 - \log_3 4$ .
- 5p** 2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\sqrt{x^2 - x - 2} = 2$ .
- 5p** 3. Să se determine o ecuație de gradul al II-lea ale cărei soluții  $x_1$  și  $x_2$  verifică simultan relațiile  $x_1 + x_2 = 2$  și  $x_1 x_2 = -3$ .
- 5p** 4. Să se determine  $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , știind că abscisa punctului de minim al graficului funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m-1)x^2 - (m+2)x + 1$  este egală cu 2.
- 5p** 5. Să se determine distanța dintre punctele  $A(3, -1)$  și  $B(-1, 2)$ .
- 5p** 6. Să se determine numărul real  $x$  pentru care  $x$ ,  $x+7$  și  $x+8$  sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

### SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $O(0,0)$  și  $A_n(n+2, 3n-2)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- 5p** a) Să se scrie ecuația dreptei determinate de punctele  $A_1$  și  $A_2$ .
- 5p** b) Să se calculeze aria triunghiului  $OA_0A_1$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , punctele  $A_1$ ,  $A_2$  și  $A_n$  sunt coliniare.
2. Se consideră polinoamele  $f = \hat{3}X^5 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X + \hat{4} \in \mathbb{Z}_5[X]$  și  $g = \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{3} \in \mathbb{Z}_5[X]$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f(\hat{0}) + f(\hat{1})$ .
- 5p** b) Să se rezolve în mulțimea  $\mathbb{Z}_5$  ecuația  $f(x) = \hat{0}$ .
- 5p** c) Să se determine cîtul împărțirii polinomului  $f$  la polinomul  $g$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in [0,1]$ .
- 5p** b) Să se arate că  $f$  este funcție crescătoare pe  $[0;1]$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $\frac{3}{e} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 2$ , pentru orice  $x \in [0,1]$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-x}$  și  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ .
- 5p** a) Să se arate că  $F(x) = -f(x) + 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că funcția  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = F(x) - f(x)$  este concavă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\int_0^1 x \cdot f(x^2) dx$ .

## VARIANTA 21

	<b>SUBIECTUL I (30p)</b>
5p	1. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{x+1} = 5 - x$ .
5p	2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = 2x + 3$ . Să se calculeze $f(0) + f(1) + \dots + f(5)$ .
5p	3. Să se determine mulțimea valorilor reale ale numărului $x$ pentru care $-4 \leq 3x + 2 \leq 4$ .
5p	4. Să se calculeze distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ cu axa $Ox$ .
5p	5. Dacă $\overline{AB} + 2\overline{CB} = \overline{0}$ , să se determine valoarea raportului $\frac{AB}{BC}$ .
5p	6. Să se calculeze aria triunghiului $ABC$ , știind că $AB = 6$ , $AC = 8$ și $BC = 10$ .
	<b>SUBIECTUL II (30p)</b>
5p	1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și funcția $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , $f(X) = X^2 - 3X + I_3$ , unde $X^2 = X \cdot X$ .
a)	Să se calculeze $\det(I_3 + B)$ .
b)	Să se demonstreze că $f(A) = I_3 + B$ .
c)	Să se arate că $(f(A))^3 = I_3 + 3B + 3B^2$ , unde $(f(A))^3 = f(A) \cdot f(A) \cdot f(A)$ .
5p	2. Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compozitie $x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$ .
a)	Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $x \circ x = x * x$ .
b)	Să se determine numărul întreg $a$ care are proprietatea că $x \circ a = 3$ , oricare ar fi numărul întreg $x$ .
c)	Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x * (y + 1) = 4 \\ (x - y) \circ 1 = 5 \end{cases}$ , unde $x, y \in \mathbb{Z}$ .
	<b>SUBIECTUL III (30p)</b>
5p	1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ .
a)	Să se verifice că $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$ , pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
b)	Să se determine ecuația asymptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției $f$ .
c)	Să se arate că $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 8$ , oricare ar fi $x > 1$ .
5p	2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ .
a)	Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .
b)	Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ , a graficului funcției $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , $g(x) = 3^{-x}$ .
c)	Să se arate că orice primitivă $F$ a funcției $f$ este concavă pe $(-\infty, 0]$ și convexă pe $[0, +\infty)$ .

## VARIANTA 22

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1 \right\} \subset M_2(\mathbb{Z})$ .
- 5p a) Să se verifice că  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$  și  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin G$ .
- 5p b) Să se arate că pentru orice două matrice  $A, B \in G$  are loc egalitatea  $A \cdot B = B \cdot A$ .
- 5p c) Să se demonstreze că inversa oricărui matrice din  $G$  aparține mulțimii  $G$ .
2. Se consideră polinomul  $f = mX^3 + 11X^2 + 7X + m$ ,  $f \in \mathbb{R}[X]$ .
- 5p a) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât polinomul  $f$  să fie divizibil cu polinomul  $g = X - 1$ .
- 5p b) Să se determine  $m \in \mathbb{Q}$  astfel încât  $f(\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$ .
- 5p c) Pentru  $m = -9$  să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului  $f$ .

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine numărul real  $x$ , știind că  $x - 3, 4, x + 3$  sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p 2. Să se calculeze distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 8x + 7$  cu axa  $Ox$ .
- 5p 3. Să se arate că  $E = \sqrt{1+3+5+\dots+21}$  este număr natural.
- 5p 4. Să se determine câte numere naturale de căte trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii  $\{1, 2, 3, 4\}$ .
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,1)$  și  $B(-1,2)$ . Să se determine coordonatele punctului  $C \in (AB)$  astfel încât  $\frac{CA}{CB} = 2$ .
- 5p 6. În triunghiul  $ABC$  măsura unghiului  $C$  este egală cu  $60^\circ$ ,  $AB = 4$  și  $BC = 2$ . Să se calculeze  $\sin A$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - e \ln x$ .
- 5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)}{f'(x)}$ .
- 5p c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$ .
- 5p a) Să se calculeze  $\int_2^e \left( f(x) - \frac{1}{x-1} \right) dx$ .
- 5p b) Să se arate că orice primitivă  $F$  a funcției  $f$  este concavă pe  $[2; +\infty)$ .
- 5p c) Să se determine  $a$  real,  $a > 2$  astfel încât aria suprafeței plane, mărginită de graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 2$  și  $x = a$ , să fie egală cu  $\ln 3$ .

## VARIANTA 23

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine numărul întreg  $x$  care verifică inegalitățile  $3 \leq \frac{2x-1}{2} \leq 4$ .
- 5p** 2. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a dreptei de ecuație  $y = -4$  cu graficul funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 6x + 5$ .
- 5p** 3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $\log_2(x-3) = 0$ .
- 5p** 4. Să se determine câte numere de două cifre se pot forma cu elementele mulțimii  $\{1, 2, 3, 4\}$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră vectorii  $\overrightarrow{OA}(2, -1)$  și  $\overrightarrow{OB}(1, 2)$ . Să se determine coordonatele vectorului  $\overrightarrow{OM}$ , unde  $M$  este mijlocul segmentului  $AB$ .
- 5p** 6. Să se calculeze  $\sin 120^\circ$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(7, 4)$ ,  $B(a, a)$  și  $C(3, -2)$  unde  $a \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Pentru  $a = 0$  să se calculeze aria triunghiului  $ABC$ .
- 5p** b) Pentru  $a = -2$  să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele  $B$  și  $C$ .
- 5p** c) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$ , astfel încât punctele  $B$ ,  $C$  și  $M(x, -2)$  sunt coliniare, pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Se consideră polinomul  $f \in \mathbb{R}[X]$ ,  $f = X^4 + aX^3 + (a+3)X^2 + 6X - 4$  care are rădăcinile  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .
- 5p** a) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$ .
- 5p** b) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât polinomul să fie divizibil cu  $X - \sqrt{2}$ .
- 5p** c) Pentru  $a = -3$  să se descompună polinomul  $f$  în produs de factori ireductibili în  $\mathbb{R}[X]$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se determine punctele de extrem ale funcției  $f$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{f'(x)}{f(x)} - 1 \right)$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, F : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$  și  $F(x) = (x+1)\ln x - x + 1$ .
- 5p** a) Să se arate că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\int_1^2 f(e^x) dx$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $\int_1^2 f(x)F(x) dx = \frac{(3\ln 2 - 1)^2}{2}$ .

## VARIANTA 24

### SUBIECTUL I (30p)

**5p** 1. Să se calculeze suma  $1+3+5+\dots+19$ .

**5p** 2. Să se demonstreze că ecuația  $x^2 - 2x + 1 + a^2 = 0$  nu admite soluții reale, oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}^*$ .

**5p** 3. Să se determine valorile reale ale lui  $m$ , știind că valoarea minimă a funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = x^2 - mx + m - 1 \text{ este egală cu } -\frac{1}{4}.$$

**5p** 4. Să se ordoneze crescător numerele  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ ,  $64$  și  $\sqrt[3]{8}$ .

**5p** 5. Fie  $ABC$  un triunghi echilateral inscris într-un cerc de centru  $O$ . Să se calculeze  $\overline{AB} + \overline{AC} - 3\overline{AO}$ .

**5p** 6. Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = \sqrt{3}$ ,  $AC = 3$  și măsura unghiului  $A$  este egală cu  $120^\circ$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații  $\begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ 2x + y + z = 4 \\ mx - y + 4z = 1 \end{cases}$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ .

**5p** a) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât  $(2, 1, -1)$  să fie o soluție sistemului.

**5p** b) Să se rezolve ecuația  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -1 & 4 \end{vmatrix} = m^2 - 3m$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ .

**5p** c) Pentru  $m = -5$  să se rezolve sistemul de ecuații.

2. Se consideră polinomul  $f = X^3 - (m+1)X^2 - 3X + 3$ ,  $f \in \mathbb{Q}[X]$ .

**5p** a) Să se determine  $m \in \mathbb{Q}$  astfel încât suma rădăcinilor polinomului  $f$  să fie egală cu 1.

**5p** b) Să se determine  $m \in \mathbb{Q}$  astfel încât polinomul  $f$  să admită rădăcina  $x_1 = \sqrt{3}$ .

**5p** c) Pentru  $m = 0$  să se descompună polinomul  $f$  în factori ireductibili în  $\mathbb{Q}[X]$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^4}{4} - \ln x$ .

**5p** a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

**5p** b) Să se determine punctul de extrem al funcției  $f$ .

**5p** c) Să se demonstreze că  $\ln \sqrt{x} \leq \frac{x^2 - 1}{4}$ , pentru orice  $x \in (0, +\infty)$ .

2. Fie  $I_n = \int_1^2 x^n e^x dx$ , pentru  $n \in \mathbb{N}$ .

**5p** a) Să se calculeze  $I_0$ .

**5p** b) Să se arate că  $I_1 = e^2$ .

**5p** c) Să se demonstreze că  $(n+1)I_n + I_{n+1} = e(2^{n+1}e - 1)$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

## VARIANTA 25

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze  $\lg 20 + \lg 3 - \lg 6$ .
- 5p** 2. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr natural de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.
- 5p** 3. Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale ecuației  $\sqrt{7-x} = 1$ .
- 5p** 4. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$ , știind că soluțiile  $x_1, x_2$  ale ecuației  $x^2 - (2m+1)x + 3m = 0$  verifică relația  $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 11$ .
- 5p** 5. Să se demonstreze că, în orice triunghi dreptunghic  $ABC$  de arie  $S$  și ipotenuză de lungime  $a$ , este adevărată identitatea  $a^2 \sin B \sin C = 2S$ .
- 5p** 6. Să se calculeze  $\sin 170^\circ - \sin 10^\circ$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații  $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+az=1 \\ x+4y+a^2z=1 \end{cases}$  și matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

- 5p** a) Să se calculeze  $\det(A(4))$ .
- 5p** b) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  pentru care matricea  $A(a)$  este inversabilă.
- 5p** c) Pentru  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$  să se rezolve sistemul.
2. Fie polinomul  $f = X^3 + aX^2 - aX - 4$ ,  $f \in \mathbb{R}[X]$ .
- 5p** a) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x_1 + x_2 + x_3 = -2$ , unde  $x_1, x_2, x_3$  sunt rădăcinile reale ale polinomului  $f$ .
- 5p** b) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât polinomul  $f$  să fie divizibil cu polinomul  $X^2 - 2$ .
- 5p** c) Să se determine  $a \in \mathbb{Z}$  pentru care polinomul  $f$  are o rădăcină rațională pozitivă.

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - x$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că  $f(x) \geq 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se scrie ecuația asymptotei oblice către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ , unde  $m, n, p \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Pentru  $m = 0$ ,  $n = -3$ ,  $p = 2$ , să se calculeze  $\int_0^1 f(x)dx$ .
- 5p** b) Să se determine  $m, n, p \in \mathbb{R}$ , știind că  $f'(-1) = f'(1) = 0$  și  $\int_{-1}^1 f(x)dx = 4$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} \int_0^x f(t)dt$ .

## VARIANTA 26

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Se consideră progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  în care  $a_3 = 5$  și  $a_6 = 11$ . Să se calculeze  $a_9$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 + x$ . Să se calculeze  $f(1) + f(2) + \dots + f(20)$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $4^{x+2} = 2^{x^2+5}$ .
- 5p** 4. Să se rezolve ecuația  $C_{n+2}^{n+1} = 2$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ .
- 5p** 5. Să se determine numărul real  $m$  pentru care vectorii  $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  și  $\vec{w} = -\vec{i} + m\vec{j}$  sunt coliniari.
- 5p** 6. Să se calculeze  $\cos 30^\circ + \cos 60^\circ + \cos 120^\circ + \cos 150^\circ$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ , unde  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Se notează  $A^2 = A \cdot A$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $A^2$ .
- 5p** b) Să se verifice că  $A^2 = aI_2 + bA$ .
- 5p** c) Știind că  $X \in M_2(\mathbb{Z})$  și  $AX = XA$ , să se arate că există  $m, n \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $X = mI_2 + nA$ .
2. Se consideră polinomul  $f = X^4 + aX^3 - X - 1$ , unde  $a \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** a) Să se determine  $a$  știind că  $x = 1$  este rădăcină a polinomului  $f$ .
- 5p** b) Pentru  $a = 1$  să se determine rădăcinile reale ale polinomului  $f$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $f(x) \neq 0$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - x - 1$ .
- 5p** a) Să se calculeze derivata funcției  $f$ .
- 5p** b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- 5p** c) Să se arate că  $e^{x^2} + e^x \geq x^2 + x + 2$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 + \ln x$  și  $g(x) = x \ln x$ .
- 5p** a) Să se arate că  $g$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\int_1^e f(x) \cdot g(x) dx$ .
- 5p** c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $g$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 1$  și  $x = e$ .

## VARIANTA 27

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine elementele mulțimii  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |2x - 1| \leq 1\}$ .
- 5p** 2. Se consideră ecuația  $x^2 + 3x - 5 = 0$  cu soluțiile  $x_1$  și  $x_2$ . Să se calculeze  $x_1^2 + x_2^2$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x^2 - 25} = 12$ .
- 5p** 4. Să se calculeze  $C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,2)$ ,  $B(5,6)$  și  $C(-1,1)$ . Să se determine ecuația medianei duse din vârful  $C$  al triunghiului  $ABC$ .
- 5p** 6. Să se calculeze aria triunghiului  $MNP$  dacă  $MN = 6$ ,  $NP = 4$  și  $m(\angle MNP) = 30^\circ$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  și  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $A^2$ , unde  $A^2 = A \cdot A$ .
- 5p** b) Să se verifice că  $AB - 2B = O_2$ .
- 5p** c) Să se arate că dacă  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  și  $A \cdot X \cdot B = O_2$ , atunci suma elementelor matricei  $X$  este egală cu zero.
2. Se consideră polinoamele  $f, g \in \mathbb{Z}_2[X]$ ,  $f = X^2 + \hat{1}$  și  $g = X + \hat{1}$  și mulțimea  $H = \left\{ a + bX + cX^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $g^2 = f$ .
- 5p** b) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului  $f + g$  la polinomul  $f$ .
- 5p** c) Să se determine numărul elementelor mulțimii  $H$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0; +\infty)$ .
- 5p** b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- 5p** c) Să se determine ecuația asymptotei orizontale la graficul funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{1004} + 2009^x$ .
- 5p** a) Să se determine  $\int f(x) dx$ .
- 5p** b) Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este funcție crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\int_0^1 x \cdot f(x^2) dx$ .

## VARIANTA 28

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Să se determine cea mai mică valoare a funcției  $f : [-2,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -3x + 1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 1$ . Să se calculeze  $f(1) + f(2) + \dots + f(6)$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(2x+5) = \log_2(x^2 + 3x + 3)$ .
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând unul dintre numerele  $C_4^2, C_5^2$  și  $C_4^3$ , acesta să fie divizibil cu 3.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,3)$ ,  $B(1,5)$  și  $C(4,2)$ . Să se calculeze distanța de la punctul  $A$  la mijlocul segmentului  $BC$ .
- 5p** 6. Se calculează  $\sin 60^\circ - \cos 30^\circ$ .

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră mulțimea  $M = \{aI_2 + bV \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ , unde  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $I_2 \in M$ .
- 5p** b) Să se arate că dacă  $A \in M$  și  $A$  este matrice inversabilă, atunci  $a \neq 0$ .
- 5p** c) Știind că  $A, B \in M$ , să se arate că  $AB \in M$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compozitie  $x * y = xy - 5(x + y) + 30$ .
- 5p** a) Să se demonstreze că  $x * y = (x - 5)(y - 5) + 5$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se determine elementul neutru al legii de compozitie „\*”.
- 5p** c) Știind că legea de compozitie „\*” este asociativă, să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x * x * x = x$ .

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e} \cdot e^x - 1, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ .
- 5p** a) Să se studieze continuitatea funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 1$ .
- 5p** b) Să se determine ecuația asimptotei către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Să se arate că funcția  $f$  este concavă pe  $(1, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$ .
- 5p** a) Să se determine  $\int (x^2 + 1) \cdot f(x) dx$ .
- 5p** b) Să se verifice că  $\int_0^1 f(x) dx = \ln(2e)$ .
- 5p** c) Să se arate că  $\int_0^1 f''(x) \cdot e^{f(x)} dx = e(e-1)$ .

## VARIANTA 29

	<b>SUBIECTUL I (30p)</b>
5p	1. Să se calculeze $C_5^2 - A_4^2 + 6$ .
5p	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x - 3$ . Să se calculeze $f(-6) + f(0) + f(6) + f(12)$ .
5p	3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 - 1) = 1$ .
5p	4. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x^2 + 2x - 7 = y \end{cases}$ , unde $x \in \mathbb{R}$ , $y \in \mathbb{R}$ .
5p	5. Să se determine numerele reale $m$ și $n$ pentru care punctele $A(3, -1)$ și $B(1, 1)$ se află pe dreapta de ecuație $x + my + n = 0$ .
5p	6. Să se calculeze $(\cos 150^\circ + \cos 30^\circ)(\sin 120^\circ - \sin 60^\circ)$ .

	<b>SUBIECTUL II (30p)</b>
1.	În mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ notăm cu $A^t$ transpusa matricei $A$ .
5p	a) Să se calculeze $I_2 + (I_2)^t$ , unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
5p	b) Să se demonstreze că pentru orice $A \in M_2(\mathbb{R})$ și $m \in \mathbb{R}$ are loc relația $(mA)^t = mA^t$ .
5p	c) Să se determine matricele $A \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $A + A^t = O_2$ , unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
2.	Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = (x - \sqrt{2})(y - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$ .
5p	a) Să se rezolve ecuația $x * x = x$ , unde $x \in \mathbb{R}$ .
5p	b) Să se demonstreze că legea de compozitie „*” este asociativă.
5p	c) Să se determine elementul neutru al legii de compozitie „*”.

	<b>SUBIECTUL III (30p)</b>
1.	Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x - \ln x$ .
5p	a) Să se arate că $f(1) - f'(1) = 1$ .
5p	b) Să se determine punctul de extrem al funcției $f$ .
5p	c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{x}$
2.	Se consideră integralele $I = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx$ și $J = \int_0^1 \frac{x e^x}{x+1} dx$ .
5p	a) Să se verifice că $I + J = e - 1$ .
5p	b) Utilizând, eventual, inegalitatea $e^x \geq x + 1$ , adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$ , să se arate că $J \geq \frac{1}{2}$ .
5p	c) Să se demonstreze că $I = \frac{e-2}{2} + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx$ .

## VARIANTA 30

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Să se calculeze suma  $1+2+2^2+2^3+\dots+2^7$ .
- 5p** 2. Să se arate că  $(x-1)(x-2) > x-3$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{2x+3} = x$ .
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element  $n$  din mulțimea  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $n^2 \leq 2^n$ .
- 5p** 5. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care dreptele  $d_1 : -2x - my + 3 = 0$  și  $d_2 : mx + y - 5 = 0$  sunt paralele.
- 5p** 6. Să se calculeze  $\sin 30^\circ - \cos 45^\circ + \sin 60^\circ$ .

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră sistemul de ecuații  $\begin{cases} x + ay + a^2z = a \\ x + by + b^2z = b \\ x + cy + c^2z = c \end{cases}$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , sunt distințe două câte două.
- 5p** a) Să se rezolve sistemul pentru  $a = 0$ ,  $b = 1$  și  $c = 2$ .
- 5p** b) Să se verifice că  $\det(A) = (a-b)(b-c)(c-a)$ , unde  $A$  este matricea asociată sistemului.
- 5p** c) Să se demonstreze că soluția sistemului nu depinde de numerele reale  $a$ ,  $b$  și  $c$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x + y + m$ , unde  $m$  este număr real.
- 5p** a) Să se arate că legea de compoziție "\*" este asociativă.
- 5p** b) Să se determine  $m$  astfel încât  $e = -6$  să fie elementul neutru al legii "\*".
- 5p** c) Să se determine  $m$  astfel încât  $(-\sqrt{3}) * (-\sqrt{2}) * m * \sqrt{3} = 3\sqrt{2}$ .

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + e^x$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- 5p** b) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $f'(x) - f''(x) + f(x) = e^x - 3$ .
2. Pentru orice număr natural  $n$  se consideră  $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n dx$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $I_1$ .
- 5p** b) Utilizând faptul că  $(1+x)^n \leq (1+x)^{n+1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  și  $x \in [0, 1]$ , să se arate că  $I_{2009} \geq I_{2008}$ .
- 5p** c) Folosind, eventual, identitatea  $x(1+x)^n = (1+x)^{n+1} - (1+x)^n$ , adevărată pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  și  $x \in \mathbb{R}$ , să se arate că  $I_n = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}$ .

## VARIANTA 31

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Se consideră progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  în care  $a_1 = 1$  și  $a_5 = 13$ . Să se calculeze  $a_{2009}$ .
- 5p** 2. Ecuația  $x^2 + mx + 2 = 0$  are soluțiile  $x_1$  și  $x_2$ . Să se determine valorile reale ale lui  $m$  pentru care  $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{x^2-x} = 4$ .
- 5p** 4. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m^2 - 1)x + m + 1$ . Să se arate că  $f(1) \geq -\frac{1}{4}$ , oricare ar fi  $m \in \mathbb{R}$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1, -1)$ ,  $B(2, 3)$  și  $C(3, 1)$ . Să se determine coordonatele punctului  $D$  astfel încât patrulaterul  $ABDC$  să fie paralelogram.
- 5p** 6. Să se calculeze  $\cos 80^\circ + \cos 100^\circ$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea  $\mathcal{M} = \left\{ A(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$  și matricea  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Să se calculeze determinantul matricei  $A(1, 1)$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că dacă  $A, B \in \mathcal{M}$ , atunci  $A + B \in \mathcal{M}$ .
- 5p** c) Să se arate că  $\det(I_2 - A(0, b)) \neq 0$ , oricare ar fi  $b \in \mathbb{R}$ .
2. Se consideră inelul de polinoame  $\mathbb{Z}_3[X]$ .
- 5p** a) Pentru  $g \in \mathbb{Z}_3[X]$ ,  $g = (X + \hat{2})^2(X + \hat{1})$ , să se calculeze  $g(\hat{0})$ .
- 5p** b) Dacă  $f \in \mathbb{Z}_3[X]$ ,  $f = X^3 + \hat{2}X$ , să se arate că  $f(x) = \hat{0}$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{Z}_3$ .
- 5p** c) Să se determine toate polinoamele  $h \in \mathbb{Z}_3[X]$ , care au gradul egal cu 3 și pentru care  $h(\hat{0}) = h(\hat{1}) = h(\hat{2}) = \hat{0}$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 \ln x$ .
- 5p** a) Să se arate că  $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$ , oricare ar fi  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x \ln x}$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $f(x) \geq -\frac{1}{2e}$ , pentru orice  $x > 0$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^x$ .
- 5p** a) Să se determine  $\int_0^1 f(x)e^{-x} dx$ .
- 5p** b) Să se arate că  $\int_0^1 f''(x) dx = 2e - 1$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx$ .

## VARIANTA 32

---

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Să se determine rația unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_{10} - a_2 = 16$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 3$ . Să se calculeze  $f(2) + f(2^2) + \dots + f(2^7)$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x+1} = x - 1$ .
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element  $n$  al mulțimii  $\{1, 2, 3, 4\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $n! \geq n^2$ .
- 5p** 5. Să se calculeze distanța de la punctul  $O(0,0)$  la punctul de intersecție a dreptelor  $d_1 : 2x - y - 2 = 0$  și  $d_2 : x + 3y - 8 = 0$ .
- 5p** 6. Să se verifice că în orice triunghi dreptunghic  $ABC$ , de ipotenuză  $BC$ , are loc relația  $\sin^2 B + \sin^2 C = 1$ .

---

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră punctele  $A_n(n, n^2)$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ .
- 5p** a) Să se determine ecuația dreptei  $A_0A_1$ .
- 5p** b) Să se calculeze aria triunghiului  $A_0A_1A_2$ .
- 5p** c) Să se arate că pentru orice  $m, n, p \in \mathbb{N}$ , distincte două câte două, aria triunghiului  $A_mA_nA_p$  este un număr natural.
2. Se consideră polinomul  $f = 4X^4 + 4mX^3 + (m^2 + 7)X^2 + 4mX + 4$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  știind că  $x=1$  este rădăcină a polinomului  $f$ .
- 5p** b) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  știind că suma rădăcinilor polinomului  $f$  este egală cu 0.
- 5p** c) Pentru  $m = -5$  să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația  $f(x) = 0$ .

---

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \frac{1}{e^x}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f(0) + f'(0)$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f'(x)}{x}$ .
- 5p** c) Să se arate că funcția  $f$  este concavă pe  $\mathbb{R}$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - x$ ,  $g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{2008} - x^{2009}$ .
- 5p** a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției  $f$ .
- 5p** b) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $f$ .
- 5p** c) Să se arate că  $\int_0^1 (x+1)g(x) dx < 1$ .

## VARIANTA 33

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Se consideră progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$ , în care  $a_1 = 2$  și  $a_2 = 4$ . Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.
- 5p 2. Să se determine funcția de gradul al doilea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - (2m+1)x + 3$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , al cărei grafic are abscisa vârfului egală cu  $\frac{7}{2}$ .
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^{2x-1} = 3^{5-x}$ .
- 5p 4. Să se calculeze  $A_5^2 - P_3$ .
- 5p 5. Să se determine numărul real  $m$  pentru care punctul  $A(2,3)$  se află pe dreapta  $d : 2x - y + m = 0$ .
- 5p 6. Să se calculeze aria triunghiului  $MNP$  știind că  $MN = 4$ ,  $NP = 6$  și  $m(\angle MNP) = 45^\circ$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea  $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ .
- 5p a) Dacă  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , să se calculeze  $AB$ .
- 5p b) Să se demonstreze că pentru oricare  $X, Y \in \mathcal{M}$ , rezultă că  $XY \in \mathcal{M}$ .
- 5p c) Să se demonstreze că, dacă  $U \in \mathcal{M}$  și  $VU = UV$ , pentru orice  $V \in \mathcal{M}$ , atunci există  $p \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
2. Se consideră polinomul  $f = (X^2 - 2X + 1)^2 - a^2$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ .
- 5p a) Știind că  $a = 0$  să se determine soluțiile ecuației  $f(x) = 0$ .
- 5p b) Să se verifice că  $f = (X^2 - 2X + 1 + a)(X^2 - 2X + 1 - a)$ .
- 5p c) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  pentru care polinomul  $f$  are toate rădăcinile reale.

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \frac{2e^x}{x + e^x}$ .
- 5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(x+e^x)^2}$ , pentru orice  $x \in [0, +\infty)$ .
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Să se arate că  $-1 \leq f(x) \leq \frac{1-e}{1+e}$ , oricare ar fi  $x \geq 0$ .
2. Pentru orice număr natural nenul  $n$  se consideră,  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$ .
- 5p a) Să se calculeze  $I_1$ .
- 5p b) Să se arate că  $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p c) Utilizând, eventual, inegalitatea  $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{x+1} \leq x^n$ , adevărată pentru orice  $x \in [0, 1]$  și  $n \in \mathbb{N}^*$ , să se demonstreze că  $\frac{1}{2} \leq 2010 \cdot I_{2009} \leq 1$ .

## VARIANTA 34

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația  $(2x-1)^2 \leq 9$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x+1$ . Să se calculeze  $f(0)+f(1)+f(2)+\dots+f(10)$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(x^2 + 4) = \log_2(x+4)$ .
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând unul dintre numerele  $P_3$ ,  $A_3^1$  și  $C_4^3$ , acesta să fie divizibil cu 3.
- 5p** 5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele  $A(2, -3)$  și  $B(-3, 2)$ .
- 5p** 6. Să se determine aria unui triunghi  $ABC$  în care  $AB = 5$ ,  $AC = 6$  și  $m(\angle BAC) = 60^\circ$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea  $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^* \right\}$  și matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ . Se notează cu  $X^t$  transpusa matricei  $X$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $A^t \cdot A$ .
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice matrice  $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  din  $\mathcal{M}$ , are loc egalitatea  $\det(X \cdot X^t) = (ad - bc)^2$ .
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice matrice  $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$  cu  $\det(X \cdot X^t) = 0$ , are loc relația  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale, se consideră legea de compoziție definită prin  $x \circ y = xy - x - y + 2$ .
- 5p** a) Să se arate că legea “ $\circ$ ” este asociativă.
- 5p** b) Să se arate că, pentru oricare  $x, y \in (1, +\infty)$ , rezultă că  $x \circ y \in (1, +\infty)$ .
- 5p** c) Să se determine  $a \in \mathbb{Z}$  cu proprietatea că  $x \circ a = a$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{Z}$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se determine  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că funcția  $f'$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + x \ln x$  și  $g(x) = 2x + \ln x + 1$ .
- 5p** a) Să se arate că  $f$  este o primitivă a funcției  $g$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\int_1^e f(x)g(x) dx$ .
- 5p** c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=1$  și  $x=e$ .

## VARIANTA 35

---

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Să se calculeze  $\log_5 10 + \log_5 3 - \log_5 6$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 1$ . Să se calculeze  $f(1) + f(2) + \dots + f(6)$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $5^{x^2-x} = 5^{5x-5}$ .
- 5p** 4. După două scumpiri succesive cu 10%, respectiv cu 20%, prețul unui produs este de 660 lei. Să se determine prețul inițial al produsului.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2, -1)$  și  $B(-2, 2)$ . Să se determine distanța dintre punctele  $A$  și  $B$ .
- 5p** 6. În triunghiul  $MNP$  se cunosc  $MN = 3$ ,  $MP = 5$  și  $m(\angle M) = 60^\circ$ . Să se calculeze lungimea laturii  $NP$ .

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Fie funcția  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  definită prin  $f(A) = A + A^t$ , unde  $A^t$  este transpusa matricei  $A$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f(I_2)$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că  $(A+B)^t = A^t + B^t$ , oricare ar fi  $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- 5p** c) Să se determine matricele  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  pentru care  $\det A = 1$  și  $f(A) = O_2$ , unde  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
2. Se consideră ecuația  $x^4 - ax^3 - ax + 1 = 0$  cu soluțiile  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ .
- 5p** b) Pentru  $a = 1$ , să se determine soluțiile reale ale ecuației.
- 5p** c) Să se determine valorile întregi ale lui  $a$  pentru care ecuația admite cel puțin o soluție număr întreg.

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x\sqrt{x} - 3x$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}-6}{2}$ , pentru orice  $x \in (0; +\infty)$ .
- 5p** b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $-4 \leq f(x) + f(x^2) \leq 0$ , pentru orice  $x \in (0; 1]$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x + 3x^2 + 2$  și  $F(x) = e^x + x^3 + 2x - 1$ .
- 5p** a) Să se arate că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) \cdot F(x) dx$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $\int_0^1 (xf(x) + F(x)) dx = F(1)$ .

## VARIANTA 36

---

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$  pentru care  $(a-3)^2 + (b+2)^2 = 0$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5 - x$ . Să se calculeze  $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdots f(5)$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3(3x-1) = \log_3(2x+1)$ .
- 5p** 4. Să se demonstreze că parabola asociată funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 + 1$  este situată deasupra axei  $Ox$ , oricare ar fi  $m \in \mathbb{R}$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,1)$ ,  $B(2,3)$  și  $C(3,m)$ . Să se determine numărul real  $m$  pentru care punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt coliniare.
- 5p** 6. Raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$  are lungimea de 3 și  $AC = 6$ . Să se calculeze  $\sin B$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$  și matricele  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  și  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- 5p** a) Să se verifice că  $B^2 = 3B$ , unde  $B^2 = B \cdot B$ .
- 5p** b) Să se arate că  $mI_3 + nB \in G$ , oricare ar fi  $m, n \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** c) Să se arate că dacă  $A \in G$  și  $A^2 = O_3$ , atunci  $A = O_3$ , unde  $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $A^2 = A \cdot A$ .
2. Se consideră polinomul  $f = X^4 - 12X^2 + 35$ ,  $f \in \mathbb{R}[X]$ .
- 5p** a) Să se arate că  $f = (X^2 - 6)^2 - 1$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că polinomul  $f$  nu are rădăcini întregi.
- 5p** c) Să se descompună polinomul  $f$  în produs de factori ireductibili în  $\mathbb{R}[X]$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 - 3x - 3)e^x$ .

- 5p** a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se determine ecuația asymptotei orizontale spre  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Să se arate că tangenta la graficul funcției  $f$ , dusă în punctul de coordonate  $(-2, f(-2))$ , este paralelă cu axa  $Ox$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dată prin  $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ e^x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ .

- 5p** a) Să se arate că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $\int_0^1 xf(x^2) dx = \frac{e}{2}$ .

## VARIANTA 37

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine soluțiile reale ale ecuației  $2^{x^2} = 16$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 - x$ . Să se calculeze  $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(10)$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x^2 - x - 2} = x - 2$ .
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii  $\{3, 4, 5, 6\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $n(n-1) \geq 20$ .
- 5p** 5. Să se determine coordonatele simetricului punctului  $A(2, -4)$  față de punctul  $B(1, -2)$ .
- 5p** 6. Să se calculeze  $\sin^2 80^\circ + \sin^2 10^\circ$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea  $M_3(\mathbb{Z})$  se consideră matricele  $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Să se determine numerele  $a$ ,  $b$  și  $c$  astfel încât  $A + F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
- 5p** b) Să se arate că pentru  $a = c = 0$  și  $b = -1$  matricea  $A$  este inversa matricei  $F$ .
- 5p** c) Să se rezolve ecuația  $F \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ , unde  $X \in M_3(\mathbb{Z})$ .
2. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  se consideră legea de compoziție  $x * y = 2xy - x - y + 1$ .
- 5p** a) Să se arate că  $x * y = xy + (1-x)(1-y)$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x * (1-x) = 0$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x - \ln x}{x + \ln x}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .
- 5p** b) Să se arate că  $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{(x + \ln x)^2}$ , oricare ar fi  $x \in [1, +\infty)$ .
- 5p** c) Să se determine ecuația asimptotei către  $+\infty$  la graficul funcției  $g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{f'(x)}{(f(x)+1)^2}$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  și  $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $\int_0^1 f'(x) dx = \ln 2$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că  $\int g(x) dx = f(x) + C$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)} dx$ .

## VARIANTA 38

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Se consideră progresia geometrică  $(b_n)_{n \geq 1}$  în care  $b_1 = 2$  și  $b_2 = 6$ . Să se calculeze  $b_5$ .
- 5p** 2. Să se determine numerele reale  $m$  pentru care minimul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + mx + 2$  este egal cu  $-\frac{1}{4}$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^{2x-5} = 3^{x^2-8}$ .
- 5p** 4. Să se rezolve ecuația  $C_n^2 = 21$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .
- 5p** 5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul  $A(1,1)$  și are panta egală cu 1.
- 5p** 6. În triunghiul  $ABC$  se cunosc  $AB = AC = 6$  și  $BC = 6\sqrt{3}$ . Să se calculeze  $\cos B$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul  $\begin{cases} x + 3y + 2z = b \\ x - 2y + az = 5, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R} \\ x + y + 4z = 4 \end{cases}$
- 5p** a) Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.
- 5p** b) Pentru  $a = -1$  și  $b = 2$  să se rezolve sistemul.
- 5p** c) Să se determine numărul real  $b$ , știind că  $(x_0, y_0, z_0)$  este soluție a sistemului și că  $x_0 + y_0 + z_0 = 4$ .
2. Se consideră polinoamele  $f = X^2 - 12X + 35$  și  $g = (X - 6)^{2009} + X - 6$ . Polinomul  $g$  are forma algebrică  $g = a_{2009}X^{2009} + a_{2008}X^{2008} + \dots + a_1X + a_0$ , cu  $a_0, a_1, \dots, a_{2009} \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f(5) + g(5)$ .
- 5p** b) Să se arate că numărul  $a_0 + a_1 + \dots + a_{2009}$  este negativ.
- 5p** c) Să se determine restul împărțirii polinomului  $g$  la polinomul  $f$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .
- 5p** a) Să se arate că  $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- 5p** c) Știind că  $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ , să se determine  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + g(x^2) + g(x^3) + \dots + g(x^{2009}) + x^{2010}}{x^{2009}}$ .
2. Se consideră  $I_n = \int\limits_e^{e^2} x \ln^n x \, dx$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $I_0$ .
- 5p** b) Să se arate că  $I_n \leq I_{n+1}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că are loc relația  $I_n = \frac{e^2(e^2 \cdot 2^n - 1)}{2} - \frac{n}{2}I_{n-1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## VARIANTA 39

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze  $\log_2 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{8}$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3 - 2x$ . Să se calculeze  $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(6)$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{169 - x^2} = 12$ .
- 5p** 4. Câte numere formate din 3 cifre distințe se pot forma cu elementele mulțimii  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ?
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2, 4)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(3, -1)$ . Să se calculeze lungimea medianei duse din vârful  $A$  al triunghiului  $ABC$ .
- 5p** 6. Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic care are un unghi de  $60^\circ$  și ipotenuza de lungime 8.

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea  $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$  și matricea  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Să se arate că  $I_2 \in \mathcal{M}$ .
- 5p** b) Știind că  $A, B \in \mathcal{M}$ , să se arate că  $A + B \in \mathcal{M}$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $\det(AB - BA) \geq 0$ , oricare ar fi  $A, B \in \mathcal{M}$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozitie  $x * y = -xy + 2x + 2y - 2$ .
- 5p** a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x * 4 = 10$ .
- 5p** b) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x * a = a * x = a$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Știind că legea „ $*$ ” este asociativă, să se calculeze  $\frac{1}{2009} * \frac{2}{2009} * \dots * \frac{4018}{2009}$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x - x + 1$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0; +\infty)$ .
- 5p** b) Să se determine punctul de extrem al funcției  $f$ .
- 5p** c) Să se arate că  $2 - e \leq f(2) \leq 0$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\int_1^2 f(x) dx$ .
- 5p** b) Să se determine  $a \in (0, 1)$  astfel încât  $\int_{-a}^a f(x) dx = 1$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\int_0^1 xf(e^x) dx$ .

## VARIANTA 40

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Să se formeze o ecuație de gradul al doilea, știind că aceasta are soluțiile  $x_1 = 2$  și  $x_2 = 3$ .
- 5p** 2. Să se rezolve sistemul de ecuații  $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 - 2x + y = 0 \end{cases}$ , unde  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5(9 - x^2) = 1$ .
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element  $n$  al mulțimii  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $n! < 5$ .
- 5p** 5. Să se calculeze  $\frac{\sin 135^\circ}{\cos 45^\circ}$ .
- 5p** 6. Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$  în care  $AB = 8, AC = 4$  și  $m(\angle BAC) = 45^\circ$ .

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră sistemul  $\begin{cases} x + 4y + 4z = 15 \\ 3x + (a+4)y + 5z = 22 \\ 3x + 2y + (3-a)z = 16 \end{cases}$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Pentru  $a = 1$  să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.
- 5p** b) Să se arate că tripletul  $(7, 1, 1)$  nu poate fi soluție a sistemului, oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se determine soluția  $(x_0, y_0, z_0)$  a sistemului pentru care  $y_0 + z_0 = 3$ .
2. Pe mulțimea  $\mathbb{Z}$  se consideră legile de compoziție  $x \perp y = x + y + 1$ ,  $x \circ y = ax + by - 1$ , cu  $a, b \in \mathbb{Z}$  și funcția  $f(x) = x + 2$ ,  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,
- 5p** a) Să se demonstreze că  $x \perp (-1) = (-1) \perp x = x$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** b) Să se determine  $a, b \in \mathbb{Z}$  pentru care legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă.
- 5p** c) Dacă  $a = b = 1$  să se arate că funcția  $f$  este morfism între grupurile  $(\mathbb{Z}, \perp)$  și  $(\mathbb{Z}, \circ)$ .

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f'(x)$ , pentru  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(1; 0)$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x}$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$  și  $F(x) = x - \ln x$ .
- 5p** a) Să se arate că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\int_1^2 F(x) \cdot f(x) dx$ .
- 5p** c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $F$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 1$  și  $x = e$ .

## VARIANTA 41

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Să se determine soluțiile reale ale inecuației  $x^2 - 9 \leq 0$ .
- 5p** 2. Să se arate că punctul  $A\left(\frac{2010}{2009}, 2\right)$  aparține graficului funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2009x - 2008$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ .
- 5p** 4. Să se determine numărul real  $x$ , știind că sirul  $1, 2x+1, 9, 13, \dots$  este progresie aritmetică.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $M(1,2)$  și  $N(2,1)$ . Să se determine ecuația dreptei  $MN$ .
- 5p** 6. Să se calculeze  $\operatorname{tg}^2 30^\circ + \operatorname{ctg}^2 45^\circ$ .

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră sistemul  $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ x-y+2z=a \end{cases}$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.
- 5p** b) Pentru  $a = 0$  să se rezolve sistemul.
- 5p** c) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât soluția sistemului să verifice relația  $x = y + z$ .
2. Se consideră polinomul  $f \in \mathbb{R}[X]$ ,  $f = X^3 - 2X^2 + aX - 8$ .
- 5p** a) Să se determine numărul real  $a$  astfel încât o rădăcină a polinomului  $f$  să fie egală cu 2.
- 5p** b) Pentru  $a = 4$  să se determine câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  la polinomul  $g = X^2 - 2X + 4$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că, dacă  $a \in (2, +\infty)$ , atunci  $f$  nu are toate rădăcinile reale.

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Fie funcția  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (1; +\infty)$ .
- 5p** b) Să se verifice că  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = -1$ .
- 5p** c) Să se arate că funcția  $f$  este descrescătoare pe intervalul  $(1, +\infty)$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$  și  $g(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln x$ .
- 5p** a) Să se arate că  $\int_1^4 f(x) dx = \ln 4 + 2$ .
- 5p** b) Să se verifice că  $\int_1^4 g(x) dx = \ln 4 - \frac{3}{4}$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\int_1^e f(x^2) \cdot g(x^2) dx$ .

## VARIANTA 42

---

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Se consideră progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  în care  $a_1 = 6$  și  $a_2 = 5$ . Să se calculeze  $a_7$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 3$ . Să se rezolve inecuația  $f(x) \leq 12$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ .
- 5p** 4. Câte numere formate din 4 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ?
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1, -1)$ ,  $B(1, 1)$  și  $C(0, -2)$ . Să se demonstreze că triunghiul  $ABC$  este dreptunghic în  $A$ .
- 5p** 6. Să se calculeze  $\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 160^\circ + \cos 170^\circ$ .

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $A^2 = 2I_2$ , unde  $A^2 = A \cdot A$ .
- 5p** b) Să se determine  $x$  real astfel încât  $\det(A - xI_2) = 0$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $A^4 \cdot X = X \cdot A^4$ , pentru orice  $X \in M_2(\mathbb{R})$ , unde  $A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A$ .
2. Se consideră mulțimea  $G = \left\{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $3 + 2\sqrt{2} \in G$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că  $x \cdot y \in G$ , pentru oricare  $x, y \in G$ .
- 5p** c) Să se arate că orice element din mulțimea  $G$  are invers în  $G$  în raport cu înmulțirea numerelor reale.

---

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{2010} + 2010^x$ .
- 5p** a) Să se determine  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x}$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$  și  $g(x) = \frac{1}{x}$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $\int_1^e g(x) dx = 1$ .
- 5p** b) Folosind identitatea  $f(x) = g(x) - \frac{x}{x^2 + 1}$ , adevărată pentru orice  $x > 0$ , să se calculeze  $\int_1^e f(x) dx$ .
- 5p** c) Utilizând inegalitatea  $f(x) \leq \frac{1}{2x^2}$ , adevărată pentru orice  $x \in [1, e]$ , să se arate că  $\ln \frac{e^2 + 1}{2} \geq \frac{e+1}{e}$ .

## VARIANTA 43

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine soluțiile reale ale sistemului  $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x+5$ . Să se calculeze  $f(2)+f(2^2)+\dots+f(2^5)$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{2x^2+3x-2} = 8$ .
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element  $n$  al mulțimii  $\{2, 3, 4, 5\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $n^2 + n > n!$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2, -1)$  și  $B(-2, a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Să se determine numărul real  $a$  astfel încât dreapta  $AB$  să conțină punctul  $O(0,0)$ .
- 5p** 6. Să se calculeze  $\cos x$ , știind că  $\sin x = \frac{3}{5}$  și măsura unui unghi ascuțit.

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea  $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$  și matricea  $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Să se arate că  $O_3 \in \mathcal{M}$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că produsul a două matrice din  $\mathcal{M}$  este o matrice din  $\mathcal{M}$ .
- 5p** c) Știind că  $A \in \mathcal{M}$  și  $\det(A) = 0$ , să se demonstreze că  $A^3 = O_3$ , unde  $A^3 = A \cdot A \cdot A$ .
2. Se consideră polinomul  $f = X^4 - X^3 + aX^2 + bX + c$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Pentru  $a = c = 1$  și  $b = -1$  să se determine câtul și restul împărțirii polinomului  $f$  la  $X^2 + 1$ .
- 5p** b) Să se determine numerele  $a, b, c$  știind că restul împărțirii polinomului  $f$  la  $X^2 + 1$  este  $X$ , iar restul împărțirii polinomului  $f$  la  $X - 1$  este  $-1$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că dacă  $a \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ , atunci  $f$  nu are toate rădăcinile reale.

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ .
- 5p** a) Să se determine ecuația asymptotei către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** b) Să se arate că  $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$  avem  $\frac{2}{3} \leq f(x^4) + f(x^2) \leq 2$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\int_1^e f(x) dx$ .
- 5p** b) Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este convexă pe intervalul  $(0, +\infty)$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că volumele corpurilor obținute prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficelor funcțiilor  $g, h: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x)$  și  $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$  sunt egale.

## VARIANTA 44

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Se consideră progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  în care  $a_2 = 5$  și  $r = 3$ . Să se calculeze  $a_8$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 2$ . Să se calculeze suma  $f(3) + f(3^2) + \dots + f(3^5)$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5(2x+1) = 1$ .
- 5p** 4. Să se calculeze numărul submulțimilor cu 2 elemente ale unei mulțimi care are 6 elemente.
- 5p** 5. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului  $AB$ , știind că  $A(5, -4)$  și  $B(-3, 6)$ .
- 5p** 6. Să se calculeze  $\sin^2 150^\circ + \cos^2 30^\circ$ .

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră matricele  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  din  $M_2(\mathbb{R})$ . Se notează cu  $A^t$  transpusa matricei  $A$ .
- 5p** a) Știind că  $ad = 4$  și  $bc = 3$ , să se calculeze  $\det(A)$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $A \cdot A^t$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că dacă suma elementelor matricei  $A \cdot A^t$  este egală cu 0, atunci  $\det(A) = 0$ .
2. Se consideră polinomul  $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ , cu rădăcinile  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .
- 5p** a) Să se calculeze suma  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ .
- 5p** b) Să se determine rădăcinile polinomului  $f$  știind că  $a = -1$ ,  $b = -2$  și  $c = 0$ .
- 5p** c) Știind că rădăcinile polinomului  $f$  sunt în progresie aritmetică, să se demonstreze că  $b = a - 1$ .

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + e^x$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $f'(0) = 1$ .
- 5p** b) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x}$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - x$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $\int_0^1 f(x) dx = e - \frac{3}{2}$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\int_0^1 xf(x) dx$ .
- 5p** c) Să se arate că dacă  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o primitivă a funcției  $f$ , atunci  $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx = F(2) - F(1)$ .

## VARIANTA 45

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine coordonatele vârfului parabolei asociate funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 4x - 5$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 4$ . Să se calculeze  $f(1) + f(2) + \dots + f(10)$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3(10 - x) = 2$ .
- 5p** 4. Să se rezolve ecuația  $A_n^2 = 12$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,2)$ ,  $B(5,2)$  și  $C(3,-1)$ . Să se calculeze perimetrul triunghiului  $ABC$ .
- 5p** 6. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea  $A = \{\sin 30^\circ, \sin 45^\circ, \sin 60^\circ\}$ , acesta să fie număr rațional.

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  din  $M_2(\mathbb{R})$ . Se notează  $A^2 = A \cdot A$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $A^2$ .
- 5p** b) Să se verifice că  $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I_2$ .
- 5p** c) Știind că  $a+d \neq 0$  și  $M \in M_2(\mathbb{R})$  cu  $A^2M = MA^2$ , să se demonstreze că  $AM = MA$ .
2. Se consideră polinomul  $f \in \mathbb{R}[X]$ ,  $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$  cu rădăcinile  $x_1, x_2, x_3$ .
- 5p** a) Pentru  $a=1$  și  $b=0$  să se determine  $x_1, x_2, x_3$ .
- 5p** b) Știind că  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$ , să se arate că  $a=1$ .
- 5p** c) Știind că  $f = (X - x_1^2)(X - x_2^2)(X - x_3^2)$ , să se determine numerele reale  $a$  și  $b$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-1)e^x$  și  $g(x) = xe^x$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $f'(x) = g(x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se determine ecuația asymptotei spre  $-\infty$  la graficul funcției  $g$ .
- 5p** c) Dacă  $I \subset \mathbb{R}$  este un interval, să se demonstreze că funcția  $g$  este crescătoare pe  $I$  dacă și numai dacă funcția  $f$  este convexă pe  $I$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  și  $g(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .
- 5p** a) Să se arate că funcția  $f$  este o primitivă a funcției  $g$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\int_1^e f(x)g(x)dx$ .
- 5p** c) Să se determine numărul real  $a \in (1; +\infty)$  astfel încât  $\int_1^a f(x)dx = 2$ .

## VARIANTA 46

<b>SUBIECTUL I (30p)</b>	
5p	1. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ în care $b_1 = 1$ și $b_2 = 3$ . Să se calculeze $b_4$ .
5p	2. Ecuatia $x^2 - x + m = 0$ are soluțiile $x_1$ și $x_2$ . Să se determine numărul real $m$ pentru care $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = -\frac{3}{4}$ .
5p	3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x - 2} = 0$ .
5p	4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element $n$ al mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ , acesta să verifice inegalitatea $3^n > n^3$ .
5p	5. În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(5, -1)$ și $B(3, 1)$ . Să se determine coordonatele simetricului punctului $A$ față de punctul $B$ .
5p	6. Să se calculeze aria triunghiului $MNP$ , știind că $MN = 10$ , $NP = 4$ și $m(\angle MNP) = 60^\circ$ .
<b>SUBIECTUL II (30p)</b>	
5p	1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ , $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{M(x, y) \mid M(x, y) = xI_2 + yA, x, y \in \mathbb{R}\} \subset M_2(\mathbb{R})$ .
a)	Să se verifice că $A^2 = O_2$ , unde $A^2 = A \cdot A$ .
b)	Să se determine inversa matricei $M(1,1)$ .
c)	Să se determine matricele inversabile din mulțimea $G$ .
5p	2. În mulțimea $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + pX^2 + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3$ și $p \in \mathbb{R}$ .
a)	Să se calculeze $f(-p)$ .
b)	Să se determine $p \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul $f$ este divizibil cu $X - 1$ .
c)	Să se calculeze în funcție de $p \in \mathbb{R}$ suma $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$ .
<b>SUBIECTUL III (30p)</b>	
5p	1. Se consideră funcția $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \in (0; 1) \\ 1 + \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ .
a)	Să se studieze continuitatea funcției $f$ în punctul $x_0 = 1$ .
b)	Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .
c)	Să se arate că $f(x) \geq \frac{3}{4}$ , pentru orice $x > 0$ .
5p	2. Se consideră funcțiile $f, g : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ și $g(x) = x \ln x$ .
a)	Să se verifice că $\int_1^2 f(x) dx = 2 \ln 2 + \frac{7}{3}$ .
b)	Să se arate că $\int_1^2 g(x) dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$ .
c)	Să se arate că există $x_0 \in (1; 2)$ astfel încât $f(x_0) > g(x_0) + 3$ .

## VARIANTA 47

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Se consideră progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  în care  $a_1 = 7$  și  $a_7 = 37$ . Să se calculeze suma primilor zece termeni ai progresiei.
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 7 - x$ . Să se calculeze  $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(7)$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{\sqrt{x-1}} = 4$ .
- 5p** 4. Să se calculeze  $C_7^5 - C_6^5 - C_6^4$ .
- 5p** 5. Să se determine numărul real pozitiv  $a$  astfel încât distanța dintre punctele  $A(2, -1)$  și  $B(-1, a)$  să fie egală cu 5.
- 5p** 6. Să se calculeze aria unui triunghi echilateral care are lungimea înălțimii egală cu  $3\sqrt{3}$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- 5p** a) Să se determine matricea  $A^2$ , unde  $A^2 = A \cdot A$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că  $A^3 = 4A^2 - 5A + 2I_3$ , unde  $A^3 = A^2 \cdot A$ .
- 5p** c) Să se determine numerele reale  $m, n, p$  astfel încât  $A^{-1} = mA^2 + nA + pI_3$ , unde  $A^{-1}$  este inversa matricei  $A$ .
2. Se consideră numerele reale  $x_1, x_2, x_3$  cu proprietatea că:
- $$x_1 + x_2 + x_3 = 2; \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2}; x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -2.$$
- 5p** a) Să se calculeze  $x_1x_2x_3$ .
- 5p** b) Să se determine  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , știind că ecuația  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  are soluțiile  $x_1, x_2, x_3$ .
- 5p** c) Să se descompună polinomul  $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 4$  în factori ireductibili peste  $\mathbb{R}[X]$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 2\ln x$ .

- 5p** a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in [1, +\infty)$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că  $\ln \frac{2010}{2009} \leq \frac{1}{2}$ .
- 5p** c) Folosind faptul că  $1 \leq x \leq x^2 \leq 2$ , oricare ar fi  $x \in [1, \sqrt{2}]$ , să se demonstreze inegalitatea  $x^2 - x \leq 2\ln x$ , pentru orice  $x \in [1, \sqrt{2}]$ .
2. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$  se consideră  $I_n = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{x^n}{x^2 - 1} dx$ .
- 5p** a) Să se arate că  $I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $I_1$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .

## VARIANTA 48

### SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Se consideră progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  în care  $a_1 = 3$  și  $a_3 = 7$ . Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.
- 5p** 2. Să se determine numerele reale  $m$  pentru care punctul  $A(m, -1)$  aparține graficului funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5(2x+3) = 2$ .
- 5p** 4. Să se calculeze numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi care are 5 elemente.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1, -2)$ ,  $B(1, 2)$  și  $C(2, -1)$ . Să se calculeze distanța de la punctul  $C$  la mijlocul segmentului  $AB$ .
- 5p** 6. Triunghiul  $ABC$  are  $AB = 8$ ,  $AC = 8$  și  $m(\angle BAC) = 30^\circ$ . Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$ .

### SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  din  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Se notează  $X^n = \underbrace{X \cdot X \cdot \dots \cdot X}_{de n ori}$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- 5p** a) Să se calculeze  $X^2$ .
- 5p** b) Să se determine inversa matricei  $X$ .
- 5p** c) Să se determine numărul real  $r$  astfel încât  $X^3 = 3X^2 + rX + I_3$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozиție  $x \circ y = 2^{x+y}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $2009 \circ (-2009)$ .
- 5p** b) Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $x \circ x^2 = 64$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că, dacă  $(x \circ y) \circ z = 2^{z+1}$ , atunci  $x = -y$ .

### SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ .
- 5p** a) Să se arate că  $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}$ , pentru orice  $x > 0$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că  $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \geq f(x)$ , oricare ar fi  $x \in (1; +\infty)$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$ .
2. Se consideră  $I_n = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^n (x^2 + 1)} dx$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $I_0 + I_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$ .
- 5p** b) Utilizând identitatea  $\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$  adevărată pentru orice  $x \neq 0$ , să se determine  $I_1$ .
- 5p** c) Să se arate că  $I_n + I_{n-2} < \frac{1}{n-1}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

## VARIANTA 49

---

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Să se calculeze suma  $1+11+21+31+\dots+111$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2x + 4$ . Să se determine valorile numărului real  $m$  pentru care punctul  $A(m, 4)$  aparține graficului funcției  $f$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{x^2+x+1} = 8$ .
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element  $n$  al mulțimii  $\{1, 2, 3, 4\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $2^n < n!$ .
- 5p** 5. În reperele carteziane  $xOy$  se consideră punctul  $A(m^2, m)$  și dreapta de ecuație  $d : x+y+m=0$ . Să se determine valorile reale ale lui  $m$  pentru care punctul  $A$  aparține dreptei  $d$ .
- 5p** 6. Să se calculeze aria triunghiului  $MNP$ , știind că  $MN = NP = 6$  și  $m(\angle MNP) = 120^\circ$ .

---

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră matricele  $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\det(M_1 + M_2)$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $M_a^2$ , unde  $M_a^2 = M_a \cdot M_a$ .
- 5p** c) Să se determine matricele  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  pentru care  $M_a X = X M_a$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}$ .
2. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  se definește legea de compoziție  $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $x * 0$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că legea „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Știind că  $x_0 \in \mathbb{Q}$  și  $x_n = x_0 * x_{n-1}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ , să se arate că  $x_3 \notin \mathbb{Q}$ .

---

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-2)\ln x$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ .
- 5p** c) Să se arate că funcția  $f'$  este crescătoare pe  $(0, +\infty)$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$  și  $g(x) = \frac{\sqrt{x} + 2}{2x}$ .
- 5p** a) Să se arate că funcția  $f$  este o primitivă a funcției  $g$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\int_1^4 f(x) \cdot g(x) dx$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $\int_1^4 g(x) \cdot f''(x) dx = -1$ .

## VARIANTA 50

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Să se determine elementele mulțimii  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x + 2 \geq 4x - 1\}$ .
- 5p** 2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 3$  cu axele de coordonate.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x^2 - 4} = 2$ .
- 5p** 4. Suma de 500 de lei a fost depusă la o bancă cu o rată a dobânzii de 8 %. Să se calculeze dobânda obținută după un an.
- 5p** 5. Să se determine coordonatele vectorului  $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ , știind că  $A(2,3)$  și  $B(-1,5)$ .
- 5p** 6. Să se calculeze aria unui triunghi echilateral care are perimetrul egal cu 6.

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră mulțimea  $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$  și matricea  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- 5p** a) Să se arate că  $I_2 \in \mathcal{M}$ .
- 5p** b) Știind că  $A, B \in \mathcal{M}$ , să se arate că  $A + B \in \mathcal{M}$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $\det(AB - BA) \leq 0$ , oricare ar fi  $A, B \in \mathcal{M}$ .
2. Se consideră mulțimea  $M = \{f \in \mathbb{Z}_3[X] \mid f = X^2 + aX + b\}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f(\hat{1})$  pentru  $a = b = \hat{1}$ .
- 5p** b) Să se determine  $a, b \in \mathbb{Z}_3$  pentru care  $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{1}$ .
- 5p** c) Să se determine numărul elementelor mulțimii  $M$ .

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$ .

- 5p** a) Să se studieze continuitatea funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 0$ .
- 5p** b) Să se determine ecuația asymptotei către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că funcția  $f$  este concavă pe intervalul  $(0, +\infty)$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{x^2}$  și  $g(x) = x$ .
- 5p** a) Să se determine  $\int f(\sqrt{x}) dx$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$ .
- 5p** c) Să se verifice că  $\int_0^1 f(x^{50}) \cdot g^{99}(x) dx = \frac{e-1}{100}$ .